Kalibrace a rekonstrukce

2. úloha z 33PVI

Vypracoval: Jan Doležel, dolezj2@fel.cvut.cz

a) Autokalibrace z rotace
b) Rekonstrukce a kalibrace

Autokalibrace z rotace

Zadání

Nalezněte kalibrační matici pro scénu zadanou obrázky. Máme k dispozici šest obrázků z Karlova náměstí a pět korespondencí bodů mezi prvním snímkem a ostatními.

Teorie

Vyjdeme ze základní rovnice kamery, kterou můžeme rozepsat:

$$\alpha u = \mathrm{P}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = (A \mid -AT)\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = (KR \mid -KRT)\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kde $K \in \Re^{3x3}$ je kalibrační matice kamery, $R \in \Re^{3x3}$ je matice rotace a $T \in \Re^3$ je střed kamery v souřadnicích světa. $\alpha \in \Re$ je koeficient, vyjadřující, že body ležící na přímce procházející středem kamery, se zobrazí do jednoho bodu v obrázku. $u \in \Re^3$ je bod obrazu odpovídající bodu ve světě $X \in \Re^3$. Kalibrační matice je pro všechny snímky stejná, mění se pouze rotace, která zachovává ortonormalitu. Díky tomu, nám stačí znát matici *K*, abychom mohli měřit úhel, který svírají dva body. *K* chceme ve tvaru horní trojúhelníkové matice:

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix}$$

Bez újmy na obecnost můžeme předpokládat, že $T = 0$. Potom můžeme pro dvě kamery psát:

$$\alpha^i u^i = A^i X = KR^i X$$
$$\alpha^j u^j = A^j X = KR^j X$$

Již víme, že $\beta^j u^j = H^{ij} u^i$ vyjadřuje převod mezi souřadnicemi bodů dvou kamer, H^{ij} je homografie. Matici H^{ij} můžeme rozepsat $H^{ij} = H^j H^{i^{-1}}$, kde $\tau^i H^i = KR^i = A^i$, stejně tak $R^{ij} = R^j R^{i^{-1}}$. Takže můžeme upravovat:

$$H^{ij} = H^j H^{i^{-1}} = \frac{KR^j}{\tau^j}\tau^i R^{i^{-1}} K^{-1} = \frac{\tau^i}{\tau^j} K(R^j R^{i^{-1}})K^{-1} = \delta^{ij} KR^{ij} K^{-1}$$

Zavedeme $\overline{H}^{ij} = \frac{H^{ij}}{\left|H^{ij}\right|^{1/3}} = \frac{\delta^{ij} KR^{ij} K^{-1}}{\left(\delta^{ij^3}\right)^{1/3}\left(\left|K\right|\left|R^{ij}\right|\left|K^{-1}\right|\right)^{1/3}} = KR^{ij} K^{-1}$

Protože R je ortonormální rotace:

$$I = R^{ij^T} R^{ij} = (K^{-1}\overline{H}^{ij} K)^T (K^{-1}\overline{H}^{ij} K) = K^T \overline{H}^{ij^T} K^{-T} K^{-1}\overline{H}^{ij} K$$

$$\overline{H}^{ij^T} K^{-T} K^{-1}\overline{H}^{ij} = K^{-T} K^{-1}$$

Označíme si $\omega = K^{-T} K^{-1}$, $\omega \in \Re^{3x3}$ a $\omega^T = \left(K^{-T} K^{-1}\right)^T = K^{-T} K^{-1} = \omega$. Pro výpočet ω tedy potřebuji šest rovnic.

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} \\ h_{12} & h_{22} & h_{32} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{12} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & \omega_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{12} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & \omega_{33} \end{pmatrix} = \omega \qquad =>$$

$$=> \qquad (h_{11} h_{21} h_{31})\omega(h_{11} h_{21} h_{31})^T = \omega_{11} \qquad =>$$

=> $\omega_{kl} = (h_{1k} h_{2k} h_{3k})\omega(h_{1l} h_{2l} h_{3l})^T$, kde (k,l) = {(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)} =>

$$\omega_{kl} = \omega_{11} h_{1k} h_{1l} + \omega_{12}(h_{1k} h_{2l} + h_{2k} h_{1l}) + \omega_{13}(h_{1k} h_{3l} + h_{3k} h_{1l}) + \omega_{22} h_{2k} h_{2l} + \omega_{23}(h_{2k} h_{3l} + h_{3k} h_{2l}) + \omega_{33} h_{3k} h_{3l}$$

Nyní můžeme sestavit matici A, aby $A\omega = 0$:

$$\begin{pmatrix} & & \cdots & & & \\ h_{11}^{ij} h_{11}^{ij} - 1 & 2 \cdot h_{11}^{ij} h_{21}^{ij} & 2 \cdot h_{11}^{ij} h_{31}^{ij} & h_{21}^{ij} h_{21}^{ij} & 2 \cdot h_{21}^{ij} h_{31}^{ij} & h_{31}^{ij} h_{31}^{ij} \\ h_{11}^{ij} h_{12}^{ij} & h_{11}^{ij} h_{22}^{ij} + h_{21}^{ij} h_{12}^{ij} - 1 & h_{11}^{ij} h_{32}^{ij} + h_{31}^{ij} h_{12}^{ij} & h_{21}^{ij} h_{22}^{ij} & h_{21}^{ij} h_{32}^{ij} + h_{31}^{ij} h_{22}^{ij} & h_{31}^{ij} h_{32}^{ij} \\ h_{11}^{ij} h_{13}^{ij} & h_{11}^{ij} h_{23}^{ij} + h_{21}^{ij} h_{13}^{ij} & h_{11}^{ij} h_{33}^{ij} + h_{31}^{ij} h_{13}^{ij} - 1 & h_{21}^{ij} h_{23}^{ij} & h_{21}^{ij} h_{33}^{ij} + h_{31}^{ij} h_{23}^{ij} & h_{31}^{ij} h_{33}^{ij} \\ h_{12}^{ij} h_{12}^{ij} & 2 \cdot h_{12}^{ij} h_{22}^{ij} & 2 \cdot h_{12}^{ij} h_{32}^{ij} & h_{22}^{ij} h_{22}^{ij} - 1 & 2 \cdot h_{22}^{ij} h_{32}^{ij} & h_{32}^{ij} h_{32}^{ij} \\ h_{12}^{ij} h_{13}^{ij} & h_{12}^{ij} h_{23}^{ij} + h_{22}^{ij} h_{13}^{ij} & h_{12}^{ij} h_{33}^{ij} + h_{32}^{ij} h_{13}^{ij} & h_{22}^{ij} h_{23}^{ij} & h_{22}^{ij} h_{33}^{ij} + h_{32}^{ij} h_{23}^{ij} - 1 & h_{32}^{ij} h_{33}^{ij} \\ h_{13}^{ij} h_{13}^{ij} & 2 \cdot h_{13}^{ij} h_{23}^{ij} & 2 \cdot h_{13}^{ij} h_{33}^{ij} & h_{23}^{ij} h_{23}^{ij} & 2 \cdot h_{23}^{ij} h_{33}^{ij} & h_{33}^{ij} h_{33}^{ij} - 1 \\ & & \cdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \\ \omega_{13} \\ \omega_{22} \\ \omega_{23} \\ \omega_{33} \end{pmatrix} = 0$$

K vypočítáme z ω pomocí Choleskyho faktorizace.

Vypracování

Pro vypracování úlohy jsme použili systém Matlab. Navíc jsme pro lepší výsledky použili normalizaci obrázků do čtverce s hranou velikosti 1. Pokusil jsem se vypočítat matici K i bez normalizace, ale v tomto případě nešla Choleskyho faktorizace provést, protože ω nebyla pozitivně definitní. S normalizací vyšlo K:

$$K = \begin{pmatrix} 2844{,}1 & -149{,}31 & 427{,}05 \\ 0 & 4964{,}4 & 517{,}18 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pro matici K často platí (pro čtvercové pixely):

$$K = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

kde a odpovídá převodu jednotek světa do pixelů, d jak daleko je střed kamery od snímaného čipu a je-li $d = 1$, b a c by měli být hodnoty středu obrázku (v pixelech). V tomto tvaru můžeme ω spočítat z

$$\omega_{kl} = \omega_{11}(h_{1k}h_{1l} + h_{2k}h_{2l}) + \omega_{13}(h_{1k}h_{3l} + h_{3k}h_{1l}) + \omega_{23}(h_{2k}h_{3l} + h_{3k}h_{2l}) + \omega_{33}h_{3k}h_{3l}$$

a $(k,l) = \{(1,1), (1,3), (2,3), (3,3)\}$. Takto vypočítané K vychází:

$$K = \begin{pmatrix} 3559 & 0 & 612{,}41 \\ 0 & 3559 & 331{,}04 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že korespondence nebyly úplně přesné a zavedli jsme pro K velké omezení, b a c vyšli hodně mimo střed obrázku (426, 568).

Rekonstrukce a kalibrace

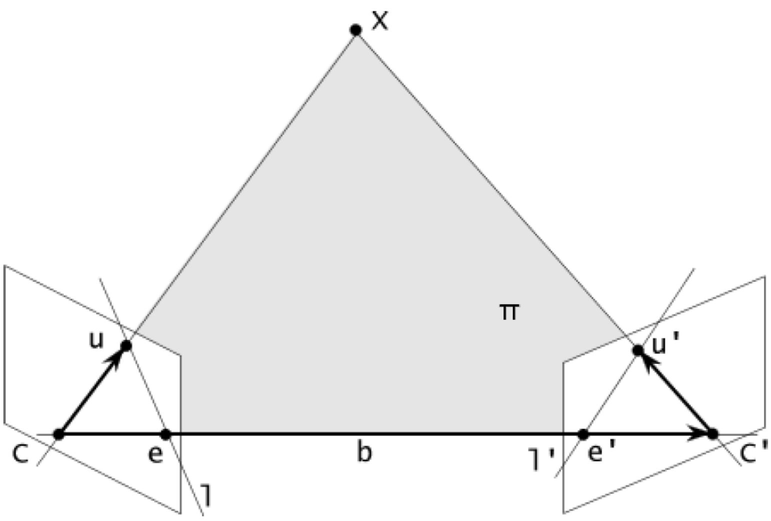
Zadání

Proveďte rekonstrukci scény z poskytnutých obrazů, nalezněte transformační matice kamer.

Obr.: Dva z osmi poskytnutých obrazů scény

Teorie

Na začátku známe pouze souřadnice některých bodů v obrázcích - u_i^j, které jsme si museli sami zjistit (16 okótovaných bodů a vrchol jehlanu), a chceme znát souřadnice odpovídajících bodů X_i. Situaci mezi dvěma kamerami popisuje obrázek:



Vyjdeme z těchto rovnic:

$$(\vec{Y}-\vec{C})-\vec{b}=\vec{Y}-\vec{C}' \qquad \vec{x}-\vec{b}=\vec{x}'$$

$$\exists\alpha>0 \ldots \alpha\vec{u}_\beta=\vec{x}_\beta \qquad \exists\alpha'>0 \ldots \alpha'\vec{u}'_{\beta'}=\vec{x}'_{\beta'}$$

$$\vec{x}_\beta=A(\vec{Y}-\vec{C}) \qquad \vec{x}'_{\beta'}=A'(\vec{Y}-\vec{C}')$$

$$A^{-1}\vec{x}_\beta-A^{-1}\vec{b}_\beta=A'^{-1}\vec{x}'_{\beta'} \qquad \vec{x}_\beta-\vec{b}_\beta=AA'^{-1}\vec{x}'_{\beta'} \qquad \alpha\vec{u}_\beta-\vec{b}_\beta=\alpha' AA'^{-1}\vec{u}'_{\beta'}$$

kde Y jsou souřadnice X v soustavě světa; β a β′ jsou souřadné soustavy kamer se středem v C, C'; x a x' jsou souřadnice X v soustavách β a β′; b a b' jsou souřadnice kamery se středem v C' v soustavě β (vzhledem k C); A, A' jsou matice přechodu od soustav β a β′ k souřadné soustavě světa.

Následující úpravy jsou již neekvivalentní v tom smyslu, že vedou jen vpřed:

$$\alpha\vec{u}_\beta-\vec{b}_\beta=\alpha' AA'^{-1}\vec{u}'_{\beta'} \quad \Rightarrow \quad \alpha\vec{b}_\beta\times\vec{u}_\beta-\vec{b}_\beta\times\vec{b}_\beta=\alpha'\vec{b}_\beta\times(AA'^{-1}\vec{u}'_{\beta'}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha\vec{u}_\beta(\vec{b}_\beta\times\vec{u}_\beta)=\alpha'\vec{u}_\beta(\vec{b}_\beta\times(AA'^{-1}\vec{u}'_{\beta'})) \quad \Rightarrow \quad 0=\vec{u}_\beta(\vec{b}_\beta\times(AA'^{-1}\vec{u}'_{\beta'}))$$

Jelikož vektorový součin lze vyjádřit jako matici lineárního zobrazení (pro kterou navíc platí: $[y]_\times^T=-[y]_\times$), můžeme poslední rovnici psát ve tvaru:

$$0=u_\beta^T[b_\beta]_\times AA'^{-1}u'_{\beta'}$$

Můžeme zavést matici $F=[b_\beta]_\times AA'^{-1}$, kterou nazýváme fundamentální maticí. Body e, e' z obrázku nazýváme epipóly (obraz druhé kamery v prvním obrázku, respektive naopak), přímky l, l' epipoláry (spojují obrazy bodů s epipóly) a rovinu π epipolární rovinou. Hodnost matice F je 2, protože matice A, A' mají hodnost 3 a hodnost matice vektorového součinu je 2 (právě tehdy, když b ≠ 0). Pro epipóly platí:

$$e_\beta^T F=\lambda b_\beta^T F=\lambda b_\beta^T[b_\beta]_\times AA'^{-1}=0$$

$$Fe'_{\beta'}=\lambda' Fb_{\beta'}=\lambda' FA'A^{-1}b_\beta=\lambda'[b_\beta]_\times AA'^{-1}A'A^{-1}b_\beta=\lambda'[b_\beta]_\times b_\beta=0$$

Epipóly představují levý a pravý nulový prostor matice F. Pro epipoláry platí následující rovnice:

$$0=l'^T u'_{\beta'} \quad \Rightarrow \quad l'=u_\beta^T F$$

$$0=u_\beta^T F \quad \Rightarrow \quad l=Fu'_{\beta'}$$

Ze souřadnic bodů $u_\beta=(u,v,1)^T$ a $u'_\beta=(u',v',1)^T$ a $0=u_\beta^T Fu'_{\beta'}$ můžeme spočítat matici F:

$$\begin{pmatrix} u_1u'_1 & u_1v'_1 & u_1 & v_1u'_1 & v_1v'_1 & v_1 & u'_1 & v'_1 & 1 \\ u_2u'_2 & u_2v'_2 & u_2 & v_2u'_2 & v_2v'_2 & v_2 & u'_2 & v'_2 & 1 \\ & \dots & & & & & & & \\ u_nu'_n & u_nv'_n & u_n & v_nu'_n & v_nv'_n & v_n & u'_n & v'_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{pmatrix} = 0$$

Takto vypočítaná matice F má však hodnost 3. My chceme, aby měla hodnost dva. Docílíme toho tak, že provedeme její SVD rozklad, vynulujeme prvek na pozici σ_{33} a znovu mezi sebou vynásobíme.

Nyní se dostáváme k rekonstrukci scény. Mějme dvě kamery s projekčními maticemi P a P':

$$\begin{matrix} \alpha_i x_i = PX_i \\ \alpha_i' x_i' = P' X_i \end{matrix} \quad => \quad \left(\frac{PX_i}{\alpha_i}\right)^T F \left(\frac{P' X_i}{\alpha_i'}\right) = 0 \quad => \quad X_i^T P^T F P' X_i = 0$$

Když označíme $Q = P^T F P'$, $Q \in \Re^{4x4}$. Snadno se přesvědčíme, že $Q^T = -Q$ (a hlavně $P^T F P' = -P' F^T P$) a $Q_{ii} = 0$. Nyní můžu mezi P a X_i vložit $H^{-1}H$ tak, aby $PH^{-1} = (I \mid 0)$:

$$\begin{aligned} \alpha x = PX = PH^{-1}HX = \tilde{P}\tilde{X} = (I \mid 0)\tilde{X} \\ \alpha' x' = P' X = P' H^{-1}HX = \tilde{P}' \tilde{X} = (A \mid a)\tilde{X} \end{aligned}$$

Zvolili jsme tedy soustavu světa shodnou se soustavou první kamery. Máme tedy:

$$\begin{gathered} (I \mid 0)^T F (A \mid a) = -(A \mid a) F^T (I \mid 0) \\ \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} F (A \mid a) = -\begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix} F (I \mid a) \\ \begin{pmatrix} FA & Fa \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} A^T F^T & 0 \\ a^T F^T & 0 \end{pmatrix} \end{gathered}$$

Vidíme, že $a^T F^F = 0$ a $Fa = 0$, a protože i $Fe' = 0$, je $a = \alpha e'$. Můžeme tedy psát $(A \mid a)\tilde{X} = (A \mid \alpha e')\tilde{X}$. Dále vidíme, že $FA = -A^T F^T$. Pokud zvolíme za $A = SF^T$, $S \in \Re^{3x3}$ zjistíme, že: $A^T F^T = -FA$ => $FS^T F^T = -FSF^T$ => $S^T = -S$. Ale takové S je například maticový součin a pro nás nejvhodnější je $[e']_\times$. Dostáváme tedy:

$$\alpha x = (I \mid 0)\widetilde{X}$$
$$\alpha' x' = ([e']_\times F^T \mid \alpha e')\widetilde{X}$$

Vidíme, že druhá kamera má střed v nevlastním bodě ve směru epipólu. Z těchto dvou kamer můžeme získat homogenní souřadnice bodů ve světě:

$$\begin{pmatrix} [x_i]_\times P_i \\ [x'_i]_\times P'_i \end{pmatrix} X_i = 0$$

Z naměřených bodů a homogenních souřadnic bodů ve světě můžeme spočítat všechny projekční matice ($x_i^j = (x_{1i}^j, x_{2i}^j, x_{3i}^j)^T$):

$$\alpha_i^j x_i^j = P^j X_i$$

$$\begin{pmatrix} \dots & & \\ x_{2i}^j X_i^T & -x_{1i}^j X_i^T & 0000 \\ x_{3i}^j X_i^T & 0000 & -x_{1i}^j X_i^T \\ 0000 & x_{3i}^j X_i^T & -x_{2i}^j X_i^T \\ \dots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{jT} \\ p_2^{jT} \\ p_3^{jT} \end{pmatrix} = 0$$

Využijeme projekční rovnici ještě jednou a vypočítáme alfy. Nyní můžeme znovu přepočítat všechny projekční matice a homogenní souřadnice bodů ve světě – budeme tak mít jejich lepší aproximaci. Na část projekční rovnice vlevo od rovnítka provedeme SVD rozklad a P a X vypočítáme třeba jako $P = U\sqrt{D}$ a $X = \sqrt{D}V^T$. V matici $P \in \Re^{4x3M}$, kde M je počet kamer, máme pod sebou projekční matice všech kamer a v matici $X \in \Re^{Nx4}$, kde N je počet bodů, jsou ve sloupcích uloženy homogenní souřadnice bodů ve světě. Nyní již jen z rovnice $\alpha Y_i = HX_i$ a několika vybraných bodů zjistíme H, která nám nalezené body transformuje do nějaké „pěkné“ souřadné soustavy.

Taková je například ortonormální s jednotkou délky o velikosti hrany jehlanu, s počátkem v jednom z bodů podstavy. V této soustavě známe souřadnice pěti bodů: 4 bodů podstavy a vrcholu jehlanu. K výpočtu H potřebujeme taky pět bodů, ale žádné čtyři nesmí ležet v rovině. Přidáme tedy ještě jeden, u kterého známe souřadnice – nevlastní bod ve směru osy z (v obrázku nahoru). Jeho souřadnice v obrázku nalezneme jako průsečík dvou rovnoběžek (rovnoběžných s osou z). Matici H pak vypočteme:

$$\begin{pmatrix} \dots & & & \\ Y_{2i}X_i^T & -Y_{1i}X_i^T & 0000 & 0000 \\ Y_{3i}X_i^T & 0000 & -Y_{1i}X_i^T & 0000 \\ Y_{4i}X_i^T & 0000 & 0000 & -Y_{1i}X_i^T \\ 0000 & Y_{3i}X_i^T & -Y_{2i}X_i^T & 0000 \\ 0000 & Y_{4i}X_i^T & 0000 & -Y_{2i}X_i^T \\ 0000 & 0000 & Y_{4i}X_i^T & -Y_{3i}X_i^T \\ \dots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^T \\ h_2^T \\ h_3^T \\ h_4^T \end{pmatrix} = 0$$

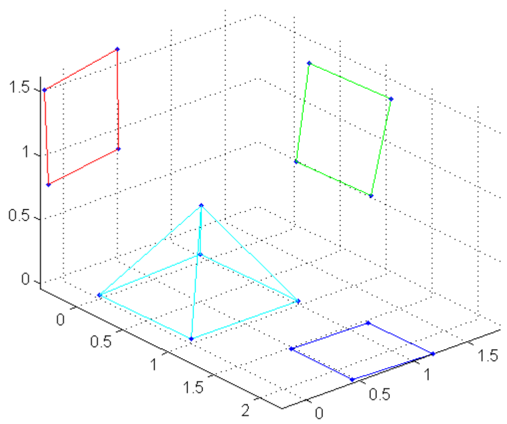
Pomocí této matice můžeme všechny body zobrazit v námi zvolené soustavě.

Vypracování

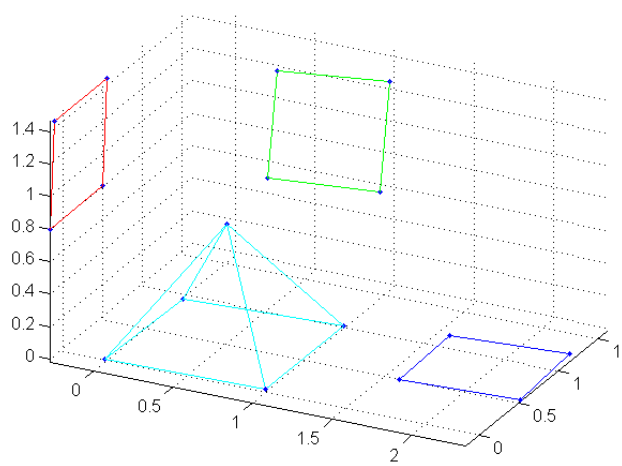
K vypracování byl i tentokrát použit program Matlab. Nejdříve jsme určili souřadnice 17ti zvolených bodů ve všech obrázcích pomocí funkce ginput, znormalizovali do čtverce o hraně délky 1 a pak postupovali podle výše uvedeného.

Vyskytnul se problém při vytváření matice H, protože pouze z pěti bodů nešlo matici vytvořit. Musel jsem přidat ještě jeden bod podstavy. Ačkoli lineárně závislý na ostatních, matici již šlo vypočítat správně.

U výsledné rekonstrukce velice závisí na přesnosti naměření bodů, ze kterých scénu vytváříme, proto se výsledky velmi liší dle použitých obrazů v jednotlivých fázích a bodů, ze kterých vytváříme přímky a počítáme nevlastní bod. Uvádím dvě scény, které vypadají nejlépe:



Scéna z kombinace 1-7

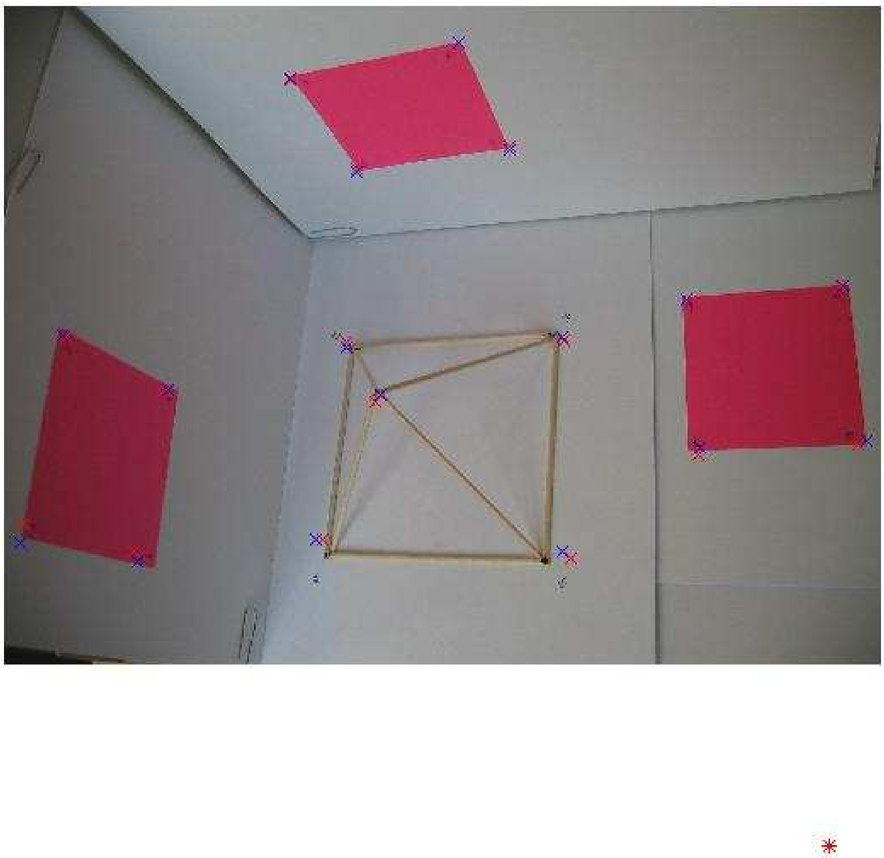


Scéna z kombinace 1-8

Při použití přiloženého skriptu, můžete vyzkoušet i jiné kombinace. Kombinace využívající obrazy 4, 5 nebo 6 se ukazují jako nepoužitelné. Ostatní kombinace dávají různě přijatelné výsledky.

Závěr

Nalezl jsem kalibrační matici pro obrázky z Karlova náměstí a rekonstruoval scénu s jehlanem. U obou obrázků jsem zaznamenal velký přínos normalizace vstupních bodů na čtverec o hraně s délkou jedna. Bez použití normalizace nebylo možné získat kalibrační matici vůbec a při rekonstrukci byla výsledná scéna více deformovaná (některé, původně, kolmice se staly téměř rovnoběžkami).



Ukázka reprojekce bodů ve 3. obraze (modrá první vypočítané P_j, červená druhé přepočítání P_j). Vpravo dole obraz nevlastního bodu – průsečík přímek, tvořících strany horního čtverce