

33PVI: 1. úloha - Panoramatický snímek

Vypracoval: Jan Doležel, dolezj2@fel.cvut.cz

Datum: 18. 4. 2005

Zadání

Vytvořte ze dvou dodaných snímků (fotografií), které se překrývají, panoramatický snímek. Transformaci jednoho obrazu na druhý hledejte jak za pomoci bodových, tak i přímkových korespondencí.



Obr. 1,2: Výchozí obrázky

Teorie

Jednotlivé snímky jsou vyjádřeny v různých souřadných soustavách. Budeme tedy hledat transformace všech obrazů do společného souřadného systému.

Bodové korespondence

Vycházíme z obecné rovnice pro transformaci vektoru z jedné souřadné soustavy do druhé: $\vec{x}_\beta = A\vec{x}_{\beta'}$, kde A je matice přechodu od β k β' . Tu můžeme upravit do tvaru $\alpha u = A(X - C)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, u je obraz bodu X vyjádřený v homogenních souřadnicích a C je střed kamery. Pro nás je zajímavá situace, kdy se střed kamery nemění, mění se jen úhel pohledu (naš případ se dvěma snímky). Střed kamery

můžeme položit do (zvolit jako) počátku souřadné soustavy a pro jeden bod ve dvou soustavách psát:

$$\begin{aligned}\alpha_1 u_1 &= A_1(X - 0) = A_1 X \\ \alpha_2 u_2 &= A_2(X - 0) = A_2 X\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}\alpha_1 A_1^{-1} u_1 &= X \\ \alpha_2 A_2^{-1} u_2 &= X\end{aligned}$$

u_1 označíme jako x a u_2 jako u a po drobné úpravě dostáváme $A_2 A_1^{-1} x = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} u$, což můžeme přepsat jako $Hx = \alpha u$, kde $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $|H| \neq 0$ je tzv. homografie vyjadřující transformaci bodů souřadné soustavy prvního obrazu do soustavy druhého obrazu a α je nenulové reálné číslo. Souřadnice bodů x a u jsou homogenní, přičemž x musí být také nenulové. Jelikož jednomu bodu $(x, y)^T$ v souřadnicích obrazu odpovídá nekonečně mnoho bodů v souřadnicích homogenních $(xt, yt, t)^T$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, lišících se pouze nenulovým násobkem reálného čísla, nepotřebujeme hledat číslo α , stačí nám matice H .

Pro jeden bod můžeme sestavit rovnice:

$$\text{Označíme-li řádky } H = \begin{pmatrix} -h_1^T & - \\ -h_2^T & - \\ -h_3^T & - \end{pmatrix}, \text{ pak } \begin{aligned} \alpha_i u_i &= h_1^T x_i \\ \alpha_i v_i &= h_2^T x_i \\ \alpha_i w_i &= h_3^T x_i \end{aligned} \text{ . Zbavíme se } \alpha:$$

$$\begin{aligned}\alpha_i u_i h_2^T x_i &= \alpha_i v_i h_1^T x_i & u_i h_2^T x_i &= v_i h_1^T x_i & v_i h_1^T x_i - u_i h_2^T x_i &= 0 \\ \alpha_i u_i h_3^T x_i &= \alpha_i w_i h_1^T x_i & \Rightarrow u_i h_3^T x_i &= w_i h_1^T x_i & \Rightarrow w_i h_1^T x_i - u_i h_3^T x_i &= 0 \\ \alpha_i v_i h_3^T x_i &= \alpha_i w_i h_2^T x_i & v_i h_3^T x_i &= w_i h_2^T x_i & w_i h_2^T x_i - v_i h_3^T x_i &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_i x_i^T h_1 - u_i x_i^T h_2 &= 0 \\ \Rightarrow w_i x_i^T h_1 - u_i x_i^T h_3 &= 0 \\ w_i x_i^T h_2 - v_i x_i^T h_3 &= 0\end{aligned}$$

Máme tři rovnice o devíti neznámých (H), ale pouze dvě jsou lineárně nezávislé. Potřebujeme tedy minimálně čtyři různé body (z nichž žádné tři neleží na přímce), abychom spočítali matici H .

$$\begin{pmatrix} \dots & & & \\ v_i x_i^T & -u_i x_i^T & 000 & \\ w_i x_i^T & 000 & -u_i x_i^T & \\ 000 & w_i x_i^T & -v_i x_i^T & \\ \dots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0$$

Jelikož si body většinou neodpovídají naprosto přesně a my chceme najít H s hodnotí 8 (určená až na násobek α), použijeme k nalezení řešení singulární rozklad matice - SVD ($[U, S, V] = \text{svd}(A)$), z jehož vlastností vyplývá, že „nejblíže“ hledané matici H je devátý (poslední) sloupec matice V (ve smyslu $(h_1^T h_2^T h_3^T)^T$).



Obr. 3,4: korespondující body

Přímkové korespondence

U přímkové korespondence vycházíme z bodové korespondence.

Přímka je jednoznačně určena dvěma body, které na ní leží. V projektivní rovině můžeme přímku l reprezentovat jedním bodem (v $\mathbb{R}^3$ je to vektor, jehož lineární obal tvoří podprostor dimenze 1, vzniklý jako vektorový součin vektorů reprezentujících body na přímce z A^3 v $\mathbb{R}^3$ - ortogonální doplněk lineárního podprostoru generovaného těmito vektory). Leží-li pak bod x na přímce l , můžeme psát $l^T x = 0$.

Mějme tedy dva různé body x, y :
 $\alpha_x x' = Hx$
 $\alpha_y y' = Hy$, pak

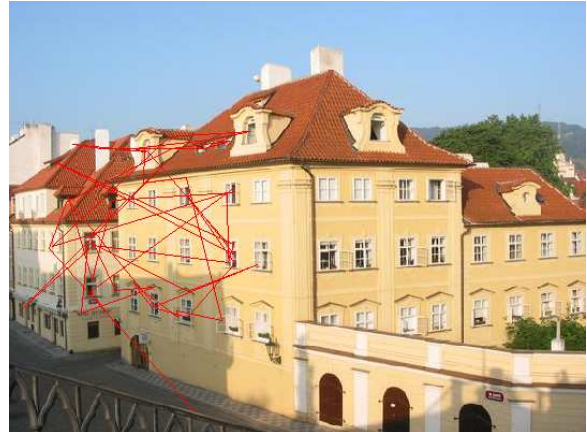
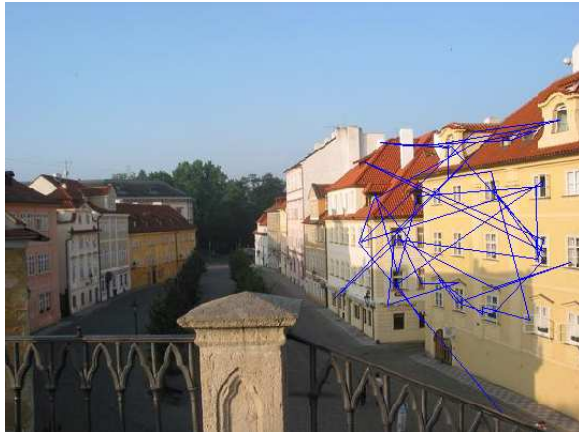
$$0 = l'^T (x', y') = l'^T \left(\frac{1}{\alpha_x} Hx, \frac{1}{\alpha_y} Hy \right) = l'^T H \left(\frac{1}{\alpha_x} x, \frac{1}{\alpha_y} y \right) = w^T \left(\frac{1}{\alpha_x} x, \frac{1}{\alpha_y} y \right), \text{ kde } l'^T H = w^T,$$

$$0 = l^T (x, y)$$

tedy $w = \gamma l$ a $l'^T H = \gamma l^T$.

Pro nalezení matice H sestavíme obdobné rovnice jako v případě bodových korespondencí a zbavíme se γ :

$$l_i^T \begin{pmatrix} | & | & | \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \gamma(l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}) \Rightarrow \begin{aligned} l_{i2} l_i^T h_1 - l_{i1} l_i^T h_2 &= 0 \\ l_{i3} l_i^T h_1 - l_{i1} l_i^T h_3 &= 0 \\ l_{i3} l_i^T h_2 - l_{i2} l_i^T h_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dots & l_{i2} l_i^T & -l_{i1} l_i^T & 000 \\ l_{i3} l_i^T & 000 & -l_{i1} l_i^T & \\ 000 & l_{i3} l_i^T & -l_{i2} l_i^T & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0$$



Obr. 5,6: korespondující přímky

Vypracování

Z webového rozhraní jsme obdrželi řadu odpovídajících si bodů. Tyto, spolu se snímky, slouží jako vstup pro skripty v programu Matlab. V příložených souborech jsou skripty pro spojení dvou obrázků do jednoho pomocí bodové a přímkové korespondence. Přímky jsem vytvořil vektorovým součinem souřadnic dvou bodů. Můžeme též použít přímky z výstupu webového rozhraní.

Matice H je stejná jak u přímkových, tak bodových korespondencí, proto můžeme tyto rovnice spojit do jedné matice. Pozor však na to, že při slučování musíme proházet sloupce matice pro přímkovou korespondenci (2 <-> 4, 3 <-> 7, 6 <-> 8). Použijeme-li však přímky vytvořené z bodů, které použijeme v rovnicích bodové korespondence, nijak si nepomůžeme, protože tyto budou lineárně závislé.

Pro lepší vizuální výsledky jsem při zapisování bodů do výsledného obrázku použil lineární interpolaci. Na rozhraní obrázků je patrný přechod, který je způsoben tím, že při snímání fotek nebyl přesně zachován střed kamery a možná i nepřesnostmi v korespondenci bodů. Pokusil jsem se také jednoduchou metodou vyřešit rozdíl v jasů u obou obrázků.



Obr. 7: Panoramatický snímek zhotovený z bodových korespondencí (s normalizací)



Obr. 8: Panoramatický snímek zhotovený z přímkových korespondencí

Pro vylepšení výsledné matice H jsem také použil normalizaci. Obrázky a korespondence jsem před výpočtem H transformoval na čtverec s hranou délky 1. Výsledek byl nepatrně lepší (menší zkřivení dál od středu obrázku) než bez použití normalizace. Výsledná matice s normalizací (pro obrázky 3, 4):

$$H = \begin{pmatrix} 1,5001 & -0,0035 & -469,0609 \\ 0,1990 & 1,3830 & -80,5233 \\ 0,0009 & 0,0000 & 1,0000 \end{pmatrix}$$

Závěr

Vyzkoušel jsme všechny tři popsané způsoby nalezení matice homografie implementací těchto postupů v systému Matlab. Výsledný obrázek není díky výše uvedeným chybám dokonalý, přesto, dle mého názoru, velice pěkný.